***Тема 4.*** **Дискретні випадкові величини, їх ОсНОВНІ характеристики та закони розподілу.**

Поняття події в теорії ймовірностей являє собою абстрактну модель певної якісної ознаки, що відбиває лише два альтернативні судження: є подія (відбулася) або немає (не відбулася). Подальший розвиток теорії ймовірностей потребував уведення такого нового поняття, як випадкова величина — абстрактної моделі кількісної ознаки.

1. Дискретні випадкові величини. Способи розподілу їх ймовірностей.

Розглянемо такий простір елементарних подій, в якому кожній елементарній події  Ώ відповідає одне і лише одне число *х* або набір чисел , тобто на множині Ώ визначена певна функ­ція. Цю функцію називають *випадковою величиною*.

Отже, величина називається *випадковою*, якщо внаслідок проведення експерименту під впливом випадкових факторів вона набуває того чи іншого можливого числового значення з певною ймовірністю.

Якщо множина можливих значень випадкової величини є зчисленною то таку величину називають *дискретною*. У противному разі її називають *неперервною*.

Випадкові величини позначають великими літерами латинського алфавіту *X*, *Y*, *Z*, ... , а їх можливі значення — малими *х; у; z*, ... .

Для опису випадкової величини необхідно навести не лише множину можливих її значень, а й указати, з якими ймовірностями ця величина набуває того чи іншого можливого значення.

З цією метою вводять поняття закону розподілу ймовірностей.

Співвідношення, що встановляє зв’язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними їм імовірностями, називають ***законом розподілу випадкової величини*.**

***Способи задання розподілу ВВ***

1. ***Табличний***

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| X | ***x***1 | ***x***2 | … | ***x***n |
| P | p1 | p2 | … | pn |



Наведена таблиця задає ***ряд розподілу*** ймовірностей ВВX

***2. Графічний***

***y***

p5

p2

p1

0 ***x*** 1 ***x*** 2 ***x***3 ***x***4 ***x***5 ***x***

Одержана ломана задає ***багатокутник розподілу*** ймовірностей ВВХ.

**Приклад 1.** За заданим у табличній формі законом розподілу дискретної випадкової величини *Х*:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | –2,5 | 1 | 3,5 | 5 | 6,5 | 8 |
| *Р* | 0,1 | 0,2 | 0,1 | 0,3 | 0,2 | 0,1 |

побудувати ймовірнісний многокутник.

***Розв’язання*.** Імовірнісний многокутник



Сума ординат імовірнісного многокутника завжди дорівнює одиниці.

***3.Аналітиий спосіб***

Нехай Х - випадкова величина.

Ймовірність події, яка полягає в тому, що Х прийме значення менше наперед заданого ***x***, позначимо через F(***x***).

***Означення.*** Функцією розподілу ймовірностей ВВX називають функцію F(***x***), яка задає ймовірність того, що випадкова величина Х в результаті випробування прийме значення, менше любого наперед заданого ***x***, тобто

F(***x***) = Р(X < ***x***).

Цю функцію називають часто інтегральною, або інтегральним законом розподілу.

Властивості функції розподілу:

1. 0 ≤ F(***x***) ≤ 1

2. Функція F(***x***) не спадна, тобто F(***x***1) ≤ F(***x***2) для довільних ***x***1 < ***x***2

3. F(-∞) = 0 

4. F(+∞) = 1 

Геометрично F(***x***) можна трактувати так.

Будемо розглядати ВВX, як випадкову точку ***x*** на осі ОХ, яка може прийняти в результаті випробування те або інше значення. F(***x***) - ймовірність того, що ВВX прийме значення лівіше х.

Якщо ***x*** → +∞, то F(+∞) = 1 - достовірна подія;

***x*** → - ∞, то F(- ∞) = 0 - неможлива подія.

Для ДВВХ функція розподілу F(***х***) розривна

F(***х***)

0,5

***х***

0 ***х***1 ***х***2 ***х***3 ***х***n

***Зауваження.*** Зв'язок між табличним законом розподілу ДВВX і функцією розподілу виражається рівністю .

**Приклад2.** ДВВX задана рядом розподілу:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| X  Знайти F(***х***) | -1 | 0 | 1 | 2 |
| P | 0,1 | 0,4 | 0,3 | 0,2 |



F(***x***)

1

0,8

0,5

***x***

-1 0 1 2

**Приклад 3.** Маємо три ящики. У першому містяться 6 стандартних і 4 браковані однотипні деталі, у другому — 8 стандартних і 2 браковані деталі, а в третьому — 5 стандартних і 5 бракованих. Із кожного ящика навмання беруть по одній деталі. Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини *Х* — появи числа стандартних деталей серед трьох навмання взятих; визначити *F*(*x*) та побудувати графік цієї функції.

***Розв’язання*.** Серед трьох навмання взятих деталей число стандартних може бути 0; 1; 2; 3.

У табличній формі закон розподілу дискретної випадкової величини має вигляд:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | 0 | 1 | 2 | 3 |
| *Р* | *р*1 | *р*2 | *р*3 | *р*4 |

Обчислимо ймовірності *р*1, *р*2, *р*3, *р*4. Із цією метою позначимо *А*с1 і *А*б1 випадкову подію, що полягає відповідно в появі стандартної деталі з першого ящика і появі бракованої деталі з першого ящика. Тоді випадкові події *А*с2, *А*б2, *А*с3, *А*б3 означають появу відповідно стандартної та бракованої деталей із другого і третього ящиків. Імовірності цих подій такі:











Перевіримо виконання умови:



Умова нормування виконується. Отже, закон розподілу ймовірностей побудовано правильно. Запишемо його в табличній формі:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
| P | 0,04 | 0,26 | 0,46 | 0,24 |

Інтегральна функція має вигляд:



Графік функції *F*(*x*)зображено на рис



1. **Числові характеристики випадкових   
    величин та їх властивості**

Закон розподілу ймовірностей для дискретних випадкових величин дає повну інформацію про них. Проте на практиці немає потреби так докладно описувати ці величини, а достатньо знати лише певні параметри, що характеризують їх істотні ознаки. Ці параметри і називають ***числовими характеристиками випадкових величин*.**

**2.1. Математичне сподівання**

Однією з найчастіше застосовуваних на практиці характеристик є *математичне сподівання*.

Термін «математичне сподівання» випадкової величини *Х* є синонімом терміна «середнє значення» випадкової величини *X*.

Математичним сподіванням випадкової величини *Х* називається величина

. (1)

Якщо Ω — обмежена множина, то

. (2!)

**2.2. Властивості математичного сподівання**

1. Математичне сподівання від сталої величини *С* дорівнює самій сталій:

*М* (*С*) *= С*. (3)

Справді, сталу *С* можна розглядати як випадкову величину, що з імовірністю, яка дорівнює одиниці, набуває значення *С*, а тому *М* (*С*) *= С* ⋅ 1 *= С.*

2. *М* (*СХ*) *= СМ* (*Х*)*.* (4)

Згідно із (1) маємо

.

3. Якщо *А* і *В* є сталими величинами, то

. (5)

Маємо:

.

**Приклад 4.** Закон розподілу дискретної випадкової величини задано таблицею:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | – 6 | – 4 | 2 | 4 | 6 | 8 |
| P | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,1 | 0,2 |

Обчислити *М* (*Х*)*.*

***Розв’язання*.** Скориставшись (2), дістанемо



**2.3. Мода дискретної випадкової величини**

**Модою (Мo)** дискретної випадкової величини *Х* називають те її можливе значення, якому відповідає найбільша ймовірність появи.

Якщо випадкова величина має одну моду, то такий розподіл імовірностей називають *одномодальним*; якщо розподіл має дві моди — *двомодальним* і т. ін. Існують і такі розподіли, які не мають моди. Їх називають *антимодальними*.

**Приклад 5.** Робітник під час роботи обслуговує три верстати-автомати. Імовірність того, що верстат-автомат потребує уваги робітника за певний проміжок часу, — величина стала і дорівнює 0,8.

Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини *Х* — числа верстатів, які потребують уваги робітника за певний проміжок часу. Знайти Мо.

***Розв’язання.***

Можливі значення випадкової величини:

*Х* = 0, 1, 2, 3.

Імовірності цих можливих значень такі:

*p*1 = (0,2)3 = 0,008;

*p*2 = 3*р q*2 = 3 ⋅ 0,8 ⋅ 0,04 = 0,096;

*p*3 = 3*p*2*q* = 3 ⋅ 0,64 ⋅ 0,2 = 0,384;

*p*4 = *p*3 = (0,8)3 = 0,512.

Запишемо закон таблицею:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *хі* | 0 | 1 | 2 | 3 |
| *рі* | 0,008 | 0,096 | 0,384 | 0,512 |

Із таблиці визначаємо Мo = 3.

Отже, дістаємо одномодальний розподіл.

2.4. Дисперсія та середнє квадратичне відхилення

Математичне сподівання не дає достатньо повної інформації про випадкову величину, оскільки одному й тому самому значенню *М* (*Х*) може відповідати безліч випадкових величин, які будуть різнитися не лише можливими значеннями, а й характером розподілу і самою природою можливих значень.

Математичне сподівання називають *центром розсіювання*. Для вимірювання розсіювання вводиться числова характеристика, яку називають *дисперсією*.

Для визначення дисперсії розглядається відхилення випадкової величини *Х* від свого математичного сподівання (*Х* – *М* (*Х*))

Математичне сподівання такого відхилення випадкової величини *Х* завжди дорівнює нулю. Справді,

.

Отже, відхилення не може бути мірою розсіювання випадкової величини.

***Дисперсією*** випадкової величини *Х* називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини

. (6)

Для дискретної випадкової величини *Х* дисперсія

; (7!)

# **2.5. Властивості дисперсії**

1. Якщо *С* — стала величина, то

. (8)

Справді

.

2. . (9)

Маємо:



3. Якщо *А* і *В* — сталі величини, то

. (10)

Адже



Дисперсію можна обчислити і за такою формулою:

 (11!)

Слід пам’ятати, що дисперсія не може бути від’ємною величиною  (!)

Доцільно мати числову характеристику такої самої вимірності, як і випадкова величина. Такою числовою характеристикою є середнє квадратичне відхилення.

***Середнім квадратичним відхиленням*** випадкової величини *Х* називають корінь квадратний із дисперсії:

. (12)

**Приклад 5.** Закон розподілу дискретної випадкової величини *Х* задано таблицею:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *хі* | – 4 | – 2 | 1 | 2 | 4 | 6 |
| *рі* | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0,1 |

Обчислити *D* (*X*), σ (*X*).

***Розв’язання.*** Згідно з (11) маємо:







**2.6. Початкові та центральні моменти**

Узагальненими числовими характеристиками випадкових величин є початкові та центральні моменти.

***Початковим моментом*** *k*-го порядку випадкової величини *Х* називають математичне сподівання величини *Х k*:

. (13)

Коли  коли *k* = 2,  і т. д.

Для дискретної випадкової величини *Х*

; (14)

***Центральним моментом*** *k*-го порядку називається математичне сподівання від (*Х* – *М*(*Х*))*k*:

 (15)

Коли 

коли *k* = 2, ;

коли *k* = 3, 

коли *k* = 4, .

Для дискретної випадкової величини

 (16)

1. **Основні закони розподілу дискретних випадкових величин.**

**3.1. Біноміальний закон розподілу ймовірностей**

Цілочислова випадкова величина *X* має біноміальний закон розподілу, якщо ймовірність її можливих значень обчислюється за формулою Бернуллі:

 *k* = 0, 1, 2, 3, ..., *n*.(17)

У табличній формі цей закон набирає такого вигляду:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | *...* | *n* |
|  |  |  |  |  |  |  |

При перевірці виконання умови нормування використовується фор­мула біному Ньютона, тому закон розподілу називають *біноміальним*:

.

.

Тоді основні числові характеристики для цього закону:

 (18)

 (19)

 (20)

**Приклад 1.** У партії однотипних деталей стандартні становлять 95%. Навмання з партії беруть 400 деталей. Визначити *М*(*Х*), *D*(*X*), σ (*Х*) для дискретної випадкової величини *Х* — появи числа стандартних деталей серед 400 навмання взятих.

***Розв’язання*.** Цілочислова випадкова величина *Х* має біноміальний закон розподілу ймовірностей, яка може набувати значення

*Х* = *k* = 0, 1, 2, ..., 400.

Імовірності можливих значень обчислюються за формулою Бернуллі: , де *р* = 0,95 — імовірність появи стандартної деталі, *q*=1–*p* =1– 0,95 = 0,05 — імовірність появи нестандартної деталі.

Згідно з (18), (19), (20), маємо:

= 400 ⋅ 0,95 = 380;

 = 400 ⋅ 0,95 ⋅ 0,05 = 19;

=≈ 4,36.

**3.2.** **Пуассонівський закон   
розподілу ймовірностей**

Цілочислова випадкова величина *Х* має пуассонівський закон розподілу, якщо ймовірності її можливих значень

, *k* = 0, 1, 2 ,3, ..., *n*, (21)

тобто обчислюється за формулою Пуассона, де . У табличній формі цей закон розподілу буде такий:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* = *k* | 0 | 1 | 2 | 3 | … | *n* |
|  |  |  |  |  |  |  |

Маємо вирази для *М*(*Х*), *D*(*X*), ϭ(*X*)

(22)

(23)

(24)

Отже, для Пуассонівського закону розподілу ймовірностей *М* (*Х*) = *D* (*X*) = λ.

**Приклад 2.** Прилад має 1000 мікроелементів, які працюють незалежно один від одного. Імовірність того, що мікроелемент вийде із ладу під час роботи приладу, є величиною сталою і дорівнює 0,004. Визначити *М* (*Х*), *D* (*X*), σ (*Х*) випадкової величини *Х* — числа мікроелементів, що вийдуть із ладу під час роботи приладу.

***Розв’язання*.** Випадкова величина *Х* є цілочисловою, що має пуассонівський закон розподілу — імовірності її можливих значень обчислюються за формулою Пуассона, котра є асимптотичною щодо формули Бернуллі для великих значень *n* і малих значень *p*, так званих малоймовірних випадкових подій.

За умовою задачі маємо:

 = 1000 ⋅ 0,004 = 4;

= 4;



**3.3. Геометричний закон розподілу ймовірностей**

Інколи спроби здійснюють до першої появи випадкової події. Число проведених спроб буде цілочисловою випадковою величиною. Цілочислова випадкова величина *Х* має геометричний закон розподілу, якщо ймовірності її можливих значень

, *k* = 1, 2, 3, …, *n*.(25)

Тут *p —* імовірність появи випадкової події в кожній спробі є величиною сталою, *q* = 1 – *p*.

У табличній формі геометричний закон розподілу такий:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|  |  |  |  |  | ... |

Числові характеристики для цього закону:

. (26)

; (27)

. (28)

Серед дискретних випадкових величин лише геометричному закону притаманна властивість відсутності післядії. Це означає, що ймовірність появи випадкової події в *k*-му експерименті не залежить від того, скільки їх з’явилося до *k*-го, і завжди дорівнює *p*.

**Приклад 3.** Гральний кубик підкидається до першої появи цифри 6. Визначити *М*(*Х*), *D*(*X*), σ(*Х*) для випадкової величини *Х* числа здійснюваних підкидань.

***Розв’язання*.** Випадкова величина *Х* є цілочисловою, що має геометричний закон розподілу ймовірностей. За умовою задачі: *p* = ; *q* = .

Скориставшись (26), (27), (28), дістанемо:

; ; .

**3.4. Рівномірний закон розподілу ймовірностей**

Цілочислова випадкова величина *Х* має рівномірний закон розподілу, якщо ймовірності її можливих значень обчислюються за формулою:

. (29)

У табличній формі запису рівномірний закон розподілу має вигляд:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | ... | *n* |
|  |  |  |  |  |  |

Числові характеристики рівномірного закону:

. (30)

 (31)

 (32)

**Приклад 4.** Знайти *М* (*Х*), *D* (*X*), σ (*Х*), якщо цілочислова ви­падкова величина *Х* має рівномірний закон розподілу і можливі значення її такі:

.

***Розв’язання.*** За умовою задачі маємо: *n* = 100, *Pk*= 1/100. Згідно з (30), (31), (32) дістаємо:

.

.

.

3.5. Гіпергеометричний закон   
розподілу ймовірностей

Цілочислова випадкова величина *Х* має гіпергеометричний закон розподілу, якщо ймовірність її можливих значень обчислюється за формулою

. (33)

Гіпергеометричний закон розподілу ймовірностей відбувається за таких обставин: нехай задано деяку множину однотипних елементів, число яких дорівнює *n*; з них елементів мають, наприклад, ознаку *А* (колір, стандартність), а решта елементів — ознаку *В*; коли із цієї множини навмання беруть *m* елементів, число елементів *k* з ознакою *А* (або *В*), що трапляється серед *m* навмання взятих елементів, буде цілочисловою випадковою величиною з гіпергеометричним законом розподілу.

У табличній формі запису цей закон розподілу подається так:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | ... | *m* |
|  |  |  |  |  |  |

При цьому *m* ≤ *n.*

Залежно від умови задачі найменше значення може становити *m =*0, 1, 2, 3, ..., *m –* 1*.*

Числові характеристики цього закону обчислюються за наведеними далі формулами:

1. . (34)

2. . (35)

3. . (36)

**Приклад 8.** В ящику міститься 10 однотипних деталей, із них 7 стандартних, а решта є бракованими. Навмання із ящика беруть *m* деталей. Побудувати закони розподілу цілочислової випадкової величини *Х —* появу числа стандартних деталей серед *m* навмання взятих і обчислити *М* (*Х*),   
*D* (*X*), σ (*Х*), якщо: 1) *m* = 3; 2) *m* = 4;

***Розв’язання.*** Використовуючи формулу (33) побудуємо гіпергеометричні закони розподілу:

1*. m* = 3; = 7; = 3; *k* = 0, 1, 2, 3.

У табличній формі гіпергеометричний закон подається так:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 |
|  |  |  |  |  |

або

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *k* | 0 | 1 | 2 | 3 |
|  |  |  |  |  |

.

1. ;
2. 

;

1. .

2. *m* = 4; = 7; = 3; *k* = 1, 2, 3, 4.

У табличній формі закон розподілу подається так:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 |
|  |  |  |  |  |

або

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *k* | 1 | 2 | 3 | 4 |
|  |  |  |  |  |

.

1. 

;

1. 

;

;

1. .